جلسه یازدهم

دوشنبه، ۵ آبان ۱۴۰۴

* معادلات خطی مرتبه $\underline{n}$ با ضرایب ثابت

شکل کلی یک ODE خطی به صورت زیر است:

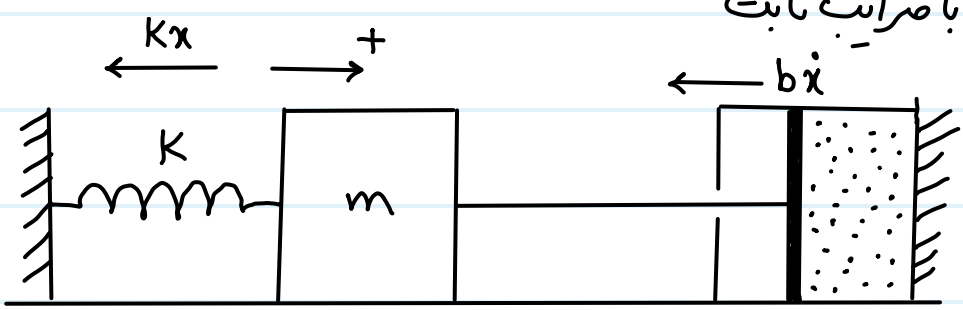
$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 \dot{x} + a_0 x = q(t) \qquad (1)$$

و a_i ها را ضرایب معادله می‌نامیم که در حالت کلی توابعی برحسب زمان t هستند (ولی به $x=x(t)$ بستگی ندارند). اگر $a_n \neq 0$ آنگاه معادله بالا را یک ODE خطی مرتبه $\underline{n}$ می‌نامیم.

در حالتی که a_i ها توابعی ثابت باشند، آنگاه معادله (۱) را معادله‌ای با ضرایب ثابت می‌گوییم.

---

* معادلات همگن خطی مرتبه دو با ضرایب ثابت $(n=2)$



$$m\ddot{x} = -Kx - b\dot{x}$$

هدف: مطالعه معادلاتی خطی به شکل کلی زیر:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + Kx = 0 \qquad (2)$$

که m، b و K اعدادی ثابت هستند.

روش حل: "روش معادله مشخصه / روش چندجمله‌ای مشخصه":

از آنجا که مشتق هر تابع نمایی، مضربی از خود تابع نمایی است لذا معادله (۲) می‌تواند جوابی نمایی به شکل $\underline{x(t) = e^{rt}}$ داشته باشد که در آن r عددی ثابت است. برای پیدا کردن مقدار $\underline{r}$، کافی است $x(t) = e^{rt}$ را در $\underline{(2)}$ جایگذاری کنیم:

$$\begin{cases} x = e^{rt} \\ \dot{x} = re^{rt} \\ \ddot{x} = r^2 e^{rt} \end{cases} \Longrightarrow m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = (mr^2 + br + k)\, e^{rt} = 0$$

طرفین تساوی آخر را برعبارت ناصفر e^{rt} تقسیم می‌کنیم. در این صورت، $x(t) = e^{rt}$ جوابی برای معادله (۲) است تنها زمانی که r جوابی برای معادله زیر باشد:

$$mr^2 + br + k = 0$$

معادله بالا را، معادلهٔ مشخصه سیستم (۲) می‌نامیم و چندجمله‌ای $p(r) := mr^2 + br + k$ را نیز چندجمله‌ای مشخصهٔ سیستم (۲) می‌گوئیم.

مثال: تمام جواب های معادلهٔ $\ddot{x} + 8\dot{x} + 7x = 0$ را بیابید.

چندجمله‌ای مشخصهٔ این معادله عبارتست از $p(r) = r^2 + 8r + 7$.

ریشه های چند جمله ای مشخصه:

$$p(r) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} r = -1 \\ r = -7 \end{cases}$$

و جواب های نمایی متناظر عبارتند از:

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-t} \\ , \\ x_2(t) = e^{-7t} \end{cases}$$

طبق اصل سوپرپوزیشن، از ترکیب خطی جواب های مستقل (پایه‌ای) می‌توانیم جواب عمومی سیستم را بیابیم:

$$\boxed{x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-7t} \quad ; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}}$$

سؤال: چرا $x(t)=c_1e^{-t}+c_2e^{-7t}$; $(c_1,c_2\in\mathbb{R})$ کلیه جواب های معادله مثال قبل را معرفی می کند؟

جواب: ☆ (امتیازی) ☆ (تا جلسه آینده)

چنانچه در مثال قبل فرض کنیم شرایط اولیه سیستم عبارتند از:

$$\begin{cases} x(0)=2 \\ \dot{x}(0)=-8 \end{cases}$$

در این صورت از آنجا که $\dot{x}(t)=-c_1e^{-t}-7c_2e^{-7t}$ ، با قرار دادن $t=0$ داریم:

$$\left.\begin{cases} x(0)=c_1+c_2=2 \\ \dot{x}(0)=-c_1-7c_2=-8 \end{cases}\right) \Rightarrow c_1=1 \quad / \therefore \quad \boxed{x(t)=e^{-t}+e^{-7t}}$$

$$-6c_2=-6 \Rightarrow c_2=1$$

---

* معادلات همگن خطی مرتبه $\underline{n}$ با ضرایب ثابت

همانند وقتی که $n=2$ بود، برای حل معادله همگن با ضرایب ثابت $a_nx^{(n)}+\dots+a_1\dot{x}+a_0x=0$ ابتدا چند جمله‌ای مشخصه را تشکیل می دهیم: $p(r)=a_nr^n+\dots+a_1r+a_0$

در این صورت تابع نمایی $x(t)=e^{rt}$ یک جواب ODE همگن بالاست اگر و فقط اگر $\underline{r}$ ریشه‌ای از $p(r)$ باشد (یعنی $p(r)=0$). طبق اصل سوپرپوزیشن / اصل ترکیب نیز هر ترکیب خطی از این توابع نمایی نیز جوابی برای ODE بالا است.

تذکر: روش چند جمله‌ای مشخصه تنها برای معادلات همگن، خطی با ضرایب ثابت قابل استفاده است.

---

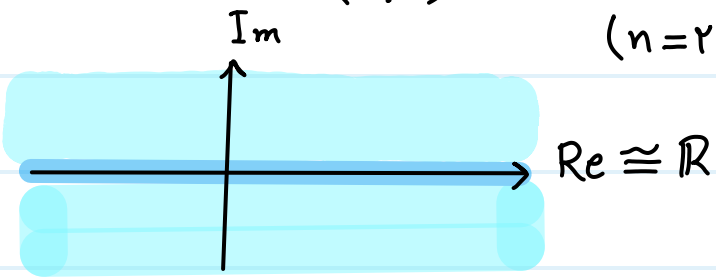
* حالت اول: چند جمله‌ای مشخصه با ریشه‌های حقیقی مجزا (فرض: $n=2$)

دیدیم اگر r_1 و r_2 ریشه‌های حقیقی چند جمله‌ای مشخصه باشند آنگاه $x_1(t)=e^{r_1 t}$ و $x_2(t)=e^{r_2 t}$ جواب‌هایی از $m\ddot{x}+b\dot{x}+Kx=0$ هستند. در این صورت اگر $r_1 \neq r_2$ آنگاه جواب عمومی این ODE (طبق اصل ترکیب) عبارتست از:

$$\boxed{x(t)=C_1 e^{r_1 t}+C_2 e^{r_2 t}}$$

---

* حالت دوم: چند جمله‌ای مشخصه با ریشه‌های مختلط محض (مجزا) $(n=2)$



$\mathbb{C}$ (صفحه مختلط)

جواب‌هایی که هرجایی غیر از روی محور اعداد حقیقی هستند را بررسی می‌کنیم.

مثال: معادله $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0$ را حل کنید.

جواب: می‌دانیم معادله مشخصه عبارتست از: $s^2+4s+5=0$. لذا ریشه‌ها عبارتند از:

$$s=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}=-2\pm i \quad ; \quad i=\sqrt{-1}$$

و جواب های نمایی به صورت $z_1(t)=e^{(-2+i)t}$ و $z_2(t)=e^{(-2-i)t}$ خواهند بود که هر دو مختلط ـ مقدار هستند. برای یافتن جواب های حقیقی از قضیه زیر استفاده می کنیم:

(* قضیه جواب های حقیقی: اگر $z(t)=u(t)+iv(t)$ یک جواب مختلط ـ مقدار برای معادلهٔ مختلط $m\ddot{z}+b\dot{z}+kz=0$ باشد (که m، b و k اعداد ثابت حقیقی هستند) آنگاه قسمت های حقیقی و موهومی $z(t)$ نیز جواب های معادله هستند.

اثبات: فرض کنیم $u(t):=Re(z(t))$ قسمت حقیقی z و $v(t):=Im(z(t))$ قسمت موهومی آن باشد. در این صورت:

$$\begin{cases} z=u+iv \\ \dot{z}=\dot{u}+i\dot{v} \\ \ddot{z}=\ddot{u}+i\ddot{v} \end{cases} \Rightarrow m\ddot{z}+b\dot{z}+kz=(m\ddot{u}+b\dot{u}+ku)+i(m\ddot{v}+b\dot{v}+kv)=0$$

چون عبارت های داخل پرانتزها هر دو حقیقی هستند، تساوی اخیر زمانی برقرار است که عبارت داخل هر دو پرانتز برابر صفر باشد. یعنی $u=u(t)$ و $v=v(t)$ جواب حقیقی سیستم هستند.)

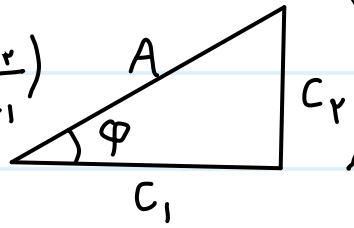
با استفاده از فرمول اویلر داریم:

$$z_2(t)=e^{-2t}e^{-it} \Rightarrow z_2(t)=\underbrace{e^{-2t}\cos t}+i(-e^{-2t}\sin t)$$

$$z_1(t)=e^{-2t}\underbrace{e^{+it}}_{=\cos t+i\sin t}=\underbrace{e^{-2t}\cos t}+i\,\underbrace{e^{-2t}\sin t}$$

در این صورت قسمت حقیقی z_1 یعنی $e^{-2t}\cos t$ و قسمت موهومی آن یعنی $e^{-2t}\sin t$ جواب پایه‌ای سیستم هستند. لذا طبق اصل ترکیب، جواب عمومی (حقیقی ـ مقدار) سیستم عبارتست از:

$$x(t) = c_1 e^{-2t}\cos t + \overbrace{c_2'(-}^{:= c_2} e^{-2t}\sin t)$$

$$x(t) = c_1 e^{-2t}\cos t + c_2 e^{-2t}\sin t = e^{-2t}\left(c_1\cos t + c_2 \sin t\right) ; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\left(= A e^{-2t}\cos(t-\varphi) \qquad A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \ , \ \varphi = \arctan\left(\frac{c_2}{c_1}\right) \right.$$